数理解析研究所講究録
602巻 1986年 137-150

Easton 型手術による ベクトル場の正則化について

京大 数学 早川 英治郎
Eijirou Hayakawa

§.1. 二体問題の特異点と正則化問題

二体問題とは, Hamilton 函数,

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(\|p_1\|^2 + \|p_2\|^2) - \frac{1}{\|q_1 - q_2\|},$$

によって定義されるHamilton力学系, つまり常微分方程式系,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2)$$

のことである. (cf. [A-M]) $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$の部分集合$S$を

$$S = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 ; \ q_1 = q_2\}$$

と定義する時, この力学系の相空間(つまり, 方程式系の定義されている空間)は,

$$\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 - S$$

となる．この時，Sを二体問題の特異点集合と呼ぶ．P_i，q_i（$i=1,2$）は第i質点のそれぞれ運動量と位置を表わすが，このことを考慮すると，特異点集合Sは，2質点の衝突状態を表わすことがわかる．

この特異点集合Sの正則化とは，雑に言って"Sへ入り込む解曲線"つまり，衝突状態に到る解曲線を"Sを越えて延長"することである．

ところで，この系は，linear momentum，P_1+P_2，（系の第1積分の1つ．cf. [A-M]）を$=0$とした積分曲面上に制限することで，（このことは，質点系の重心を固定することに対応する）Kepler 問題に還元される．Kepler 問題とは，Hamilton函数，

$$H(P,q)=\frac{1}{2}\|P\|^2-\frac{1}{\|q\|}.$$

によって定義されるHamilton力学系のことである．二体問題の特異点集合は，この制限によって，

$$S=\{(P,q)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ ;\ q=0\}$$

となる．

このKepler 問題に関して，上で述べた正則化の問題は，古くより研究され，質点が平面内を動く場合は，Levi-

Civita によって解かれ，Moserにより一般次元（i.e. P, $q \in \mathbb{R}^n$）に拡張された．（cf. [Mos]）この正則化は，解のパラメーターの変換によって，特異点集合を越え解析接続できることを示したものであった．

§.2. Easton の idea

二体問題の正則化問題は，§.1で述べたように解析的方法によって解かれたが，Easton は，より位相的方法でこの問題を解いた．ここでは，その方法について述べよう．

まず，次のような状況を考える．Mを向きづけ可能なn次元 C^∞ 多様体（$n \geq 2$），SをMの閉部分集合とする．XをM－S上の C^∞ ベクトル場で，次の条件をみたすものとする．

x を通る最大解曲線が，$(a,\ b)$ 上で存在する時，

$$a > -\infty \quad ならば \quad \lim_{t \to a+0} d(S,\ \varphi^t(x)) = 0,$$

$$b < +\infty \quad ならば \quad \lim_{t \to b-0} d(S,\ \varphi^t(x)) = 0.$$

ここで，φ はXの積分を表わす．

この状況のもとで，Sに対する "Isolating Block" という概念を導入する．

定義 1. Mのn次元連結部分多様体Bが，次

の条件 i)～iii) を満す時，S に対する *Isolating Block* であると言う．

i)．　$S \subseteq \mathrm{Int}\, B \subseteq M$

ii)．　B の境界 ∂B $(\neq \phi)$ の部分集合 b^+, b^-, τ を

$$b^+ = \{ x \in \partial B ;\ {}^{\exists}\varepsilon > 0,\ x \cdot [-\varepsilon, 0) \subseteq B^c \}$$

$$b^- = \{ x \in \partial B ;\ {}^{\exists}\varepsilon > 0,\ x \cdot (0, \varepsilon] \subseteq B^c \}$$

$$\tau = \{ x \in \partial B ;\quad X_x \in T_x b \}$$

と，定義する時，（X_x はベクトル場 X の x での値を示す．）b^+, b^- は b の $n-1$ 次元境界つき部分多様体であり，τ は $n-2$ 次元部分多様体となる．しかも，次の関係をみたす：

$$\partial B = b = b^+ \cup b^-,\quad \partial b^+ = \partial b^- = b^+ \cap b^- = \tau .$$

iii)．　B の部分集合 A^+, A^- を

$$A^+ = \{ x \in B ;\ x \cdot [0, t_x) \subseteq B \}$$

$$A^- = \{ x \in B ;\ x \cdot (t_x', 0] \subseteq B \}$$

と定義する．ただし，$x \cdot [0, t_x)$ は x を通る正方向への最大解曲線，$x \cdot (t_x', 0]$ は負方向への最大解曲線とする．この時，$x \in A^+$ または A^- ならば，

$$\lim_{t \to t_x - 0} d(\varphi^t(x), S) = 0,$$

$$\lim_{t \to t_x' - 0} d(\varphi^t(x), S) = 0,$$

をみたす．

以下，B，$A^{\pm}$，$\mathcal{b}$，$\mathcal{b}^{\pm}$，τ等は，ことわりなしに上で定義した意味で用いる．更に，次の記法を用いる：

$$a^+ = A^+ \cap \mathcal{b} = A^+ \cap \mathcal{b}^+, \quad a^- = A^- \cap \mathcal{b} = A^- \cap \mathcal{b}^-.$$

また，すでに定義1の中で用いているが，xを通る軌道の部分集合$\{\varphi^t(x)\ ;\ t \in J\}$（Jは，実数$\mathbb{R}$の部分集合）を$x \cdot J$と記す．

このIsolating Blockは，次の基本的な補題を満す．

補　題　1.　　A^+，A^-はB－Sで閉集合である．a^+，a^-は$\mathcal{b}$（したがってMで）で閉集合であり，しかも$Int\,\mathcal{b}^+$，$Int\,\mathcal{b}^-$にそれぞれ含まれる．

補　題　2.（cf.[E1]）　$\mathcal{b}^+ - a^+$，$\mathcal{b}^- - a^-$上の函数σ^+，σ^-を

$$\sigma^+(x) = sup\{\ t \in \mathbb{R}_+\ ;\ x \cdot [0,\ t) \subset B\ \},$$

$$\sigma^-(x) = sup\{\ t \in \mathbb{R}_+\ ;\ x \cdot (-t,\ 0] \subset B\ \}$$

と定義すると，σ^+，σ^-は連続函数となる．

更に，補題2よりも強く，次の命題が成り立つ．

補　題　3.　　$\sigma^{\pm} \mid Int\,\mathcal{b}^{\pm} - a^{\pm}$ は可微分である．

補題２，３を用いると，

補　題　４．　$b^+ - a^+$ は $b^- - a^-$ と位相同型である．Int $b^+ - a^+$ は Int $b^- - a^-$ と微分同型である．

証　明．　写像

$$\pi : b^+ - a^+ \longrightarrow b^- - a^-$$

を，$\pi(x) = \varphi^{\sigma^+(x)}(x)$ で定義すればよい．

特異点集合 S に対して，Isolating Block B が存在する状況を考えよう．S がこの B に関して，正則化可能である，ということを，次のように定義する．

定　義　２．　特異点集合 S が，Isolating Block B に関して正則化可能であるとは，B によって決まる微分同型写像（cf．補題４），

$$\pi : \mathrm{Int}\, b^+ - a^+ \longrightarrow \mathrm{Int}\, b^- - a^-$$

（$\pi \mid \mathrm{Int}\, b^+ - a^+$ を単に，"π" と記すことにする．）

が，Int b^+ より Int b^- への同型写像に拡張可能なことを言う．つまり，微分同型写像，

$$\tilde{\pi} : \mathrm{Int}\, b^+ \longrightarrow \mathrm{Int}\, b^-$$

で，$\tilde{\pi} \mid \mathrm{Int}\, \mathcal{B}^{+} - a^{+} = \pi$ となるものが存在することを言う．

Easton は§1で述べたKepler問題に関して，次の結果を得ている．

定理（Easton［E1］）Kepler問題の特異点集合に対しては，それを正則化可能とするIsolating Blockが存在する．

§.3. Easton 型手術による
ベクトル場の正則化

§2で述べたようにKepler問題の特異点集合に対しては，"特定の" Isolating Block でそれに関して特異点集合が正則化可能となるものが存在する．（［E1］では，具体的に構成している）ところで，他のIsolating Block が存在する時，そのIsolating Block に関して正則化可能でない，ということが起こるなら，"正則化可能"という概念は無意味なものとなってしまう．

そこで，正則化可能性のIsolating Block に対する独立性が問題となる．この節では，この問題について述べよう．以下，簡単のため次の記号を用いる．

$\mathcal{B}$ = Sに関する Isolating Block の全体

$\mathcal{B}_{\phi}$ = { $B \in \mathcal{B}$; $\forall x \in \tau$ に対して,

$$\langle X_x \rangle + T_x \tau = T_x \mathscr{b} \}$$

ここで, $\langle X_x \rangle$ は X_x が $T_x \mathscr{b}$ で生成する一次元部分ベクトル空間を表わす. 以後, $\mathcal{B} \neq \phi$ を仮定して話を進める.

以下の議論の基礎となる定義を与える.

定義 3. B, B' ($\in \mathcal{B}$) が以下の条件を満足する時, B と B' の間に"関係" $B > B'$ が成立するという:

i). $S \subseteq B \subseteq B'$

ii). 函数

$$t^{\pm} : \mathrm{Int}\, \mathscr{b}^{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\partial t^{\pm} : \partial \mathscr{b}^{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

を

$$t^{+}(x) = \sup\{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot (-t, 0] \cap \mathscr{b}'^{+} = \phi \}$$

$$t^{-}(x) = \sup\{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot [0, t) \cap \mathscr{b}'^{-} = \phi \}$$

$$\partial t^{+}(x) = \sup\{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot (-t, 0] \cap \mathscr{b}'^{+} = \phi \}$$

$$\partial t^{-}(x) = \sup\{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot [0, t) \cap \mathscr{b}'^{-} = \phi \}$$

と定義する. この時これらの函数はすべて微分可能となり, 更に写像,

$$\eta^{\pm} : \mathrm{Int}\, \mathscr{b}^{\pm} \longrightarrow \mathscr{b}'^{\pm}$$

$$\partial\eta^{\pm} : \partial\mathcal{B}^{\pm} \longrightarrow \mathcal{B}'^{\pm}$$

を，

$$\eta^{\pm}(x) = \varphi^{-t^{+}(x)}(x), \quad \varphi^{t^{-}(x)}(x)$$

$$\partial\eta^{\pm}(x) = \varphi^{-\partial t^{+}(x)}(x), \quad \varphi^{\partial t^{-}(x)}(x)$$

で定義する時，それぞれ埋め込みとなる．

定義3より，次の補題が容易に得られる．

補題 5． $B, B' \in \mathfrak{B}$ が $B < B'$ であるとする．この時，S が B に関して正則化可能であることと，B' に関して正則化可能であることは同値である．

証明． 定義1．iii)より，$a^{\pm}$ の $\eta^{\pm}$ による像は，$a'^{\pm}$ となるとわかる．このことと定義3より，

$$(*) \qquad \pi' \mid \mathrm{Im}\,\eta^{+} - a'^{+} = \eta^{-} \circ \pi \cdot (\eta^{+} \mid \mathrm{Int}\,\mathcal{B}^{+} - a^{+})^{-1}$$

を得る．この関係(*)より，補題の主張は容易に示される．

特異点集合 S が Isolating Block $B \in \mathfrak{B}_{\Phi}$ に関して正則化可能であるとする．この時，写像 π の拡張の1つ $\tilde{\pi}$ によって，$M - \mathrm{Int}\,B$ 上に次のように同値関係が定義される：

$$x \sim y \iff \text{i)} \quad x = y, \quad \text{または}$$

ii) $x \in \mathscr{b}^+$, $y \in \mathscr{b}^-$ かつ

$\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$.

この同値関係による商空間 $\bar{M} = M - \mathrm{Int}\, B / \sim$ に関して,

命 題 1. $\bar{M}$上には可微分構造で,

$$p \mid M - B : M - B \longrightarrow \bar{M} - p(\mathscr{b})$$

を微分同型とするものが定義できる. ここで, pは$\bar{M}$上への射影である. この多様体$\bar{M}$をSの Isolating Block Bと拡張$\tilde{\pi}$に関する正則化多様体と呼ぶ.

ところで, $\mathcal{B} \neq \phi$より$\mathcal{B}_\phi \neq \phi$ が成り立つか, ということが問題となるが, より強く次の補題が成り立つ.

補 題 6. $B \in \mathcal{B}$に対して, $B_0 \in \mathcal{B}_\phi$で,

$$B_0 > B$$

をみたすものが存在する.

証明の概略. τの$\mathscr{b}^+$におけるカラー近傍

$$\mathscr{C}^+ : \tau \times [0, 1] \hookrightarrow \mathscr{b}^+$$

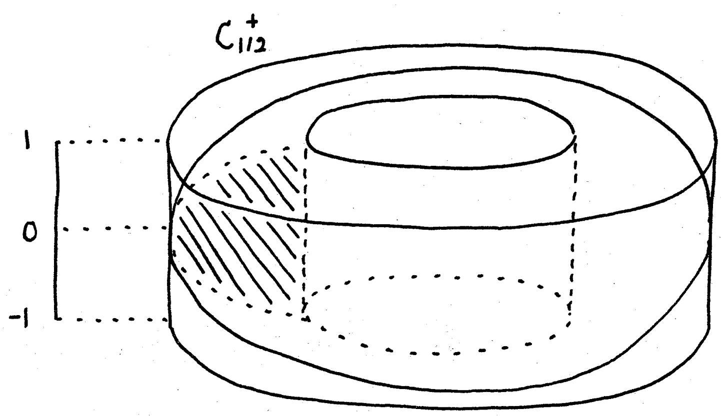
を, $\mathrm{Im}\, \mathscr{C}^+ \cap a^+ = \phi$ となるようにとる. $C_{1/2}^+ = \mathscr{C}^+(\tau \times [1/2, 1])$ を通る軌道とBとの共通部分の全体は, 函数σ^+

(cf. 補題2)の可微分性と $\langle X_x \rangle + T_x\mathcal{C}^+ = T_xM$ が Int $\mathcal{C}^+$ ($\supset C_{1/2}^+$) 上の任意の点で成り立つことに注意すると,

$$C_{1/2}^+ \times [-1, 1]$$

と微分同型であることがわかる. しかも, この微分同型は各 $x \in C_{1/2}^+$ を通る軌道を $\{x\} \times [-1, 1]$ に対応するようにつくれる.

下図に示すように, $C_{1/2}^+ \times [-1, 1]$ から角 $\mathcal{E}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{1\}$, $\mathcal{E}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{-1\}$ を除く.



この角を除いて得られる多様体と $\mathcal{C}^+ - \mathrm{Im}\,\mathcal{E}^+$ と $\mathcal{C}^- - \pi(\mathrm{Im}\,\mathcal{E}^+)$ にはさまれたBの中にある軌道の部分の全体が, 求める Isolating Block B_0 となる. (上図参照) この時, $\mathcal{E}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{0\}$ が τ_0 に対応する.

以上の準備のもとに, この節のはじめに述べた問題の解が次のように与えられる. $B, B' \in \mathcal{B}_\phi$ が $B > B'$ を満すとす

る．Bに関してSは正則化可能とする．すると，補題5によってB′に関しても正則化可能となるが，この時，それぞれπ，π′の拡張$\tilde{\pi}$，$\tilde{\pi}'$が

$$(**) \qquad \tilde{\pi}' \mid \mathrm{Im}\,\eta^{+} = \eta^{-} \circ \tilde{\pi} \circ (\eta^{+})^{-1}$$

を満すようにとる．（cf. 補題5・証明中の(*)）すると，

定理 1. B，$\tilde{\pi}$及びB′，$\tilde{\pi}'$に関する正則化多様体 $\bar{M} = M - \mathrm{Int}\,B/\sim$，$\bar{M}' = M - \mathrm{Int}\,B'/\sim$は位相同型である．

更に，次の定理が成り立つ．

定理 2. $\mathcal{B}$に属する任意のIsolating Block B，B′に対して，$a^{\pm}$が$b^{\pm}$の部分多様体であるとすると，

$$B_0 > B \quad かつ \quad B_0 > B'$$

をみたす，$B_0 \in \mathcal{B}_\phi$が存在する．この時$a^{\pm}$も多様体となる．

補題5と定理2を合わせると，

系 1. 正則化可能性は，Isolating Blockのとり方に独立に，その力学系固有の性質として定義できる．

Sは正則化可能とする．B，$B'\in\mathcal{B}$を定理2の仮定を満すIsolating Blockの組とする．定理2の$B_0\in\mathcal{B}_\Phi$をとる．この時，π，π'の拡張$\tilde{\pi}$，$\tilde{\pi}'$がそれぞれπ_0の1つの拡張$\tilde{\pi}_0$と，関係(**)をみたす時，同一なものとみなす．すると，

系 2.　正則化多様体は拡張のとり方と位相同型を除いて一意に決まる．

§.4. 応用

Kepler問題は，§.2で設定した枠組みと定理2の仮定を満す．よって，系1とEastonの定理を合わせると，

定理 3.　Kepler問題の特異点は，正則化可能である．

文献

[A-M] R. Abraham & J. E. Marsden : *Foundation of mechanics*, Benjamin (1978) 2nd. ed..

[D] R. Devaney : Collision orbits in the anisotropic Kepler problem. Invent. Math., 45 (1978), 221-251.

[E 1] R. Easton : Regularization of vector fields by surgery, J. Diff. Eq., 10 (1971), 92 - 99.

[E 2] : Some topology of 3-body problem, J. Diff. Eq., 10 (1971), 371 - 377.

[E 3] : The topology of the regularized integral surfaces of 3-body problem, J. Diff. Eq., 12 (1972), 361 - 384.

[H] E. Hayakawa : Regularization of vector fields by Easton type surgery, preprint.

[McG] R. McGhee : Triple collision in the collinear three-body problem, Invent. Math., 27 (1974), 191 - 227.

[Mos] J. Moser : Regularization of Kepler's problem and averaging method on a manifold, Comm. Pure & Appl. Math., 23 (1970), 609 - 636.